数理解析研究所講究録
141巻 1972年 1-31

強擬凸領域上の Cauchy-Riemann の微分方程式

茨城大学 理学部 安達謙三

§1. 序

1959年に Leray は凸領域に対する Cauchy-Fantappie の公式が成立することを証明したが，一方1964年に Aizenberg は一般の領域に対して Cauchy-Fantappie の公式が成立することを証明した。1967年に Koppelman は行列式の理論を駆使して，Aizenberg と別の方法でこの公式を証明したが，証明は全く省いている。1970年に Lieb は Koppelman の論文に完全な証明を加えると共に，1970年に Ramirez と Henkin が証明した強擬凸領域に対しては Cauchy-Fantappie の公式は正則な核をもつということを利用して，$\bar{\partial}$-Neumann 問題の解の評価と有界な正則函数の芽の層に対するコホモロジーの消滅定理を得ている。すなわち f を $\mathbb{C}^n$ の領域 G 上の函数とするとき

$|f|_G = \sup_{x \in G} |f(x)|$ と定義する。

α を $\alpha_{i_1\cdots i_q}$ を係数とする G 上の $(0,q)$ 形式 とするとき

$|\alpha| = \max_{i_1\cdots i_q} |\alpha_{i_1\cdots i_q}|_G$ と定義する。

このとき

定理　G を C^5 級の境界 ∂G をもつ強擬凸領域とする。すると次の性質をもつ定数 K が存在する。β を G 上の $\bar\partial$ 閉 $C^\infty(0,q+1)$ 形式とすると G 上の $C^\infty(0,q)$ 形式 α が存在して

$$\bar\partial\alpha = \beta \quad , \qquad |\alpha| \leqq K|\beta| \qquad \text{となる。}$$

この定理から次の定理が導かれる。

定理　$\mathfrak{H}$ を G 上の有界な正則函数の芽の層とすると $q \geqq 1$ に対して

$$H^q(G, \mathfrak{H}) = 0 \qquad \text{となる。}$$

§2　Cauchy-Fantappiè の積分公式

1.　W を $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \{(x,y) = (x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) \ ; x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^n\}$ の開集合とする。W 上の重微分形式 α は

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p \\ j_1<\cdots<j_q \\ k_1<\cdots<k_r \\ l_1<\cdots<l_s}} \alpha_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q k_1\cdots k_r l_1\cdots l_s}(x,y)\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \wedge d\bar{x}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{x}_{j_q} \cdot dy_{k_1}\wedge\cdots\wedge dy_{k_r}\wedge d\bar{y}_{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{y}_{l_s}$$

と表わされる。または簡単に

$$\alpha = \sum_{I,J,K,L} \alpha_{I,J,K,L}(x,y)\, dx_I \wedge d\bar{x}_J \cdot dy_K \wedge d\bar{y}_L$$

と書く。$\alpha_{I,J,K,L}$ は W 上の函数である。このとき α の型は $(p,q;r,s)$ であるという。

$\deg_x \alpha = p+q$, $\deg_y \alpha = r+s$, $\deg \alpha = p+q+r+s$ とおく。

$d_x \alpha = \sum d_x \alpha_{I,J,K,L} \wedge dx_I \wedge d\bar{x}_J \wedge dy_K \wedge d\bar{y}_L$ と定義する。

$\alpha^\nu = \begin{pmatrix} \alpha_\nu^1 \\ \vdots \\ \alpha_\nu^n \end{pmatrix}$ α_ν^j $(j=1,2,\cdots,n)$ はすべて同じ型の重微分形式とする。

定義 1

$$\bar{\partial}_x \alpha^\nu = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_x \alpha_\nu^1 \\ \vdots \\ \bar{\partial}_x \alpha_\nu^n \end{pmatrix}$$ と定義する。

定義 2 S_n を $(1,2,\cdots,n)$ の置換全体とする。ε_σ を置換 σ の符号とする。

$$D(\alpha^1,\cdots,\alpha^n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_n^{\sigma_n}$$ と定義する。

$$D_{k_1 \cdots k_r}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r) = D(\underbrace{\alpha^1,\cdots,\alpha^1}_{k_1},\cdots,\underbrace{\alpha^r,\cdots,\alpha^r}_{k_r})$$

$k_1+\cdots+k_r = n$ と書く。

これらの定義から以下の補助定理が容易に得られる。

補助定理 1

$$D(\alpha^1,\cdots,\alpha^n) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \pm \bigwedge_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\nu^\mu \wedge dx_\mu \right)$$

補助定理 2

$$D(\alpha^1,\cdots,\alpha^\nu,\alpha^{\nu+1},\cdots,\alpha^n) = \begin{cases} -D(\alpha^1,\cdots,\alpha^{\nu+1},\alpha^\nu,\cdots,\alpha^n) \\ +D(\alpha^1,\cdots,\alpha^{\nu+1},\alpha^\nu,\cdots,\alpha^n) \end{cases}$$

α^ν と $\alpha^{\nu+1}$ が交換可能かそうでないかに従って成立する。

補助定理 3.

$$\bar\partial_x D(\alpha^1,\cdots,\alpha^n) = D(\bar\partial_x\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^n) + (-1)^{\deg_x\alpha^1} D(\alpha^1,\bar\partial_x\alpha^2,\cdots,\alpha^n) + \cdots + (-1)^{\deg_x\alpha^1+\cdots+\deg_x\alpha^{n-1}} D(\alpha^1,\cdots,\alpha^{n-1},\bar\partial_x\alpha^n)$$

2. $f_\nu^\mu(x,y)\in C^2(W)$ とする。
$(\nu,\mu=1,2,\cdots,n)$

$f_\nu^*(x,y)=(f_\nu^1(x,y),\cdots,f_\nu^n(x,y))\in\mathbb{C}^n$ とおく。

$f_\nu(x,y)=\sum_{\mu=1}^n f_\nu^\mu(x,y)(x_\mu-y_\mu)$ とおく。

f_ν は W 上に零点をもたないと仮定する。

定義3. $1\leqq q\leqq n$ なる自然数 q に対して

$$D_q(f^*)=D\left(\frac{f_1^*}{f_1},\bar\partial_y\left(\frac{f_2^*}{f_2}\right),\cdots,\bar\partial_y\left(\frac{f_q^*}{f_q}\right),\bar\partial_x\left(\frac{f_{q+1}^*}{f_{q+1}}\right),\cdots,\bar\partial_x\left(\frac{f_n^*}{f_n}\right)\right)$$

を Cauchy-Fantappiè の微分形式という。

定理1 $D_q(f^*)$ は f_1^* に独立である。

証明 $g_\nu(x,y)=x_\nu-y_\nu$ とおく。 すると

$$f_\nu=\sum_{\mu=1}^n f_\nu^\mu g_\mu,\quad \bar\partial_y f_\nu=\sum_{\mu=1}^n(\bar\partial_y f_\nu^\mu)g_\mu,\quad \bar\partial_x f_\nu=\sum_{\mu=1}^n(\bar\partial_x f_\nu^\mu)g_\mu$$

$$D_q(f^*)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma\frac{f_1^{\sigma_1}}{f_1}\wedge\frac{\bar\partial_y(f_2^{\sigma_2})f_2-f_2^{\sigma_2}\bar\partial_y(f_2)}{(f_2)^2}\wedge\cdots\wedge\frac{\bar\partial_x(f_n^{\sigma_n})f_n-f_n^{\sigma_n}\bar\partial_x f_n}{(f_n)^2}$$

に代入して

$$D_q(f^*)=\frac{1}{f_1(f_2)^2\cdots(f_n)^2}\sum_{\substack{\sigma_1\cdots\sigma_n\\ \tau_2\cdots\tau_n}}\varepsilon_\sigma f_1^{\sigma_1}g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n}\left(f_2^{\tau_2}\bar\partial_y(f_2^{\sigma_2})-f_2^{\sigma_2}\bar\partial_y(f_2^{\tau_2})\right)\wedge\cdots\wedge\left(f_n^{\tau_n}\bar\partial_x f_n^{\sigma_n}-f_n^{\sigma_n}\bar\partial_x f_n^{\tau_n}\right)$$

となる。 上の式で

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ $\Sigma_1=\tau_2,\cdots,\tau_n$ の少くとも一つが σ_1 となるもの, と分解する。

補助定理４　　$\Sigma_2 = 0$

証明　　$f_\nu^{\tau_\nu}\partial_y f_\nu^{\sigma_\nu} - f_\nu^{\sigma_\nu}\partial_y f_\nu^{\tau_\nu} = A_\nu^{\sigma_\nu\tau_\nu}$

$f_\nu^{\tau_\nu}\partial_x f_\nu^{\sigma_\nu} - f_\nu^{\sigma_\nu}\partial_x f_\nu^{\tau_\nu} = A_\nu^{\sigma_\nu\tau_\nu}$　　とおく。

すると $A_\nu^{\sigma_\nu\tau_\nu} = -A_\nu^{\tau_\nu\sigma_\nu}$　である。

定義より　$\Sigma_2 = \sum_{\sigma_1} \varepsilon_\sigma f_1^{\sigma_1} \sum_{\substack{\sigma_2\cdots\sigma_n\\ \tau_2\cdots\tau_n}} g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$

どの τ_ν も σ_1 に等しくない。　と表わせる。

$\varepsilon_{\sigma_1\cdots\sigma_n} = \pm\,\varepsilon_{\sigma_2\cdots\sigma_n}$　であるから

$$\Sigma_2 = \sum_{\sigma_1} \delta_{\sigma_1} f_1^{\sigma_1} \sum \varepsilon_{\sigma_2\cdots\sigma_n} g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$$

と書ける。　$\delta_{\sigma_1} f_1^{\sigma_1}$ の係数は０になる

$\sigma_1 = 1$ と仮定してよい。

補助定理５

$$\sum_{\sigma_\nu,\tau_\nu=1}^{n} \varepsilon_{\sigma_1\cdots\sigma_n} g_{\tau_1}\cdots g_{\tau_n} A_1^{\sigma_1\tau_1}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n} = 0$$

証明　　$A_1^{\sigma_1\tau_1}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$ のすべての係数は

$$\varepsilon_{\sigma_1\cdots\sigma_n} g_{\tau_1}\cdots g_{\tau_n} - \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{\sigma_1\cdots\tau_\nu\cdots\sigma_n} g_{\tau_1}\cdots g_{\sigma_\nu}\cdots g_{\tau_n}$$

$$+ \sum_{1\le\nu_1<\nu_2\le n} \varepsilon_{\sigma_1\cdots\tau_{\nu_1}\cdots\tau_{\nu_2}\cdots\sigma_n} g_{\tau_2}\cdots g_{\sigma_{\nu_1}}\cdots g_{\sigma_{\nu_2}}\cdots g_{\tau_n} + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^n \varepsilon_{\tau_1\cdots\tau_n} g_{\sigma_1}\cdots g_{\sigma_n}) = S_{\sigma_1\cdots\sigma_n,\tau_1\cdots\tau_n}$$

となる。　故に $S_{\sigma_1\cdots\sigma_n,\tau_1,\cdots,\tau_n} = 0$　と示せばよい。

補助定理６

$$S_{\sigma_1\cdots\sigma_n,\,\tau_1\cdots,\tau_n} = 0$$

証明　σ 恒等置換と仮定する。　$S_{\sigma_1\cdots\sigma_n,\tau_1\cdots\tau_n} = S_{\tau_1\cdots\tau_n}$ と表わす。　$S_{1,2\cdots,n} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sum_{1\le\nu_1<\cdots<\nu_j\le n} \varepsilon_{1\cdots\nu_1\cdots\nu_j\cdots n}\, g_1\cdots g_{\nu_1}\cdots g_{\nu_j}\cdots g_n$

$$= g_1 \cdots g_n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$$

$\tau_\nu = \nu$, $\nu \leqq k$ なる $(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ に対してすでに証明されたと仮定する。任意の $\rho \in N^n$, $\rho_\nu = \nu$, $\nu \leqq k-1$ に対して示す。

$\tau_\nu = \rho_\nu$, $\nu \neq k$, $\tau_k = k$ とする。

$$S_{\rho_1 \cdots \rho_n} = \varepsilon_{1 \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_n} \frac{g_{\rho_k}}{g_{\tau_k}}$$

$$- \Big\{ \Big(\sum_{\nu} \varepsilon_{1 \cdots \tau_\nu \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\sigma_\nu} \cdots g_{\tau_n} - \varepsilon_{1 \cdots k \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\sigma_k} \cdots g_{\tau_n} \Big) \frac{g_{\rho_k}}{g_{\tau_k}}$$

$$+ \varepsilon_{1 \cdots \rho_k \cdots n}\, g_{\rho_1} \cdots g_{\sigma_k} \cdots g_{\rho_n} \Big\}$$

$$+ \Big\{ \Big(\sum_{\nu_1 < \nu_2} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{\nu_1} \cdots \tau_{\nu_2} \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\sigma_{\nu_1}} \cdots g_{\sigma_{\nu_2}} \cdots g_{\tau_n}$$

$$- \sum_{1 \leqq \nu_1 < k} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{\nu_1} \cdots k \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\sigma_{\nu_1}} \cdots g_{\sigma_k} \cdots g_{\tau_n}$$

$$- \sum_{k < \nu_1 \leqq n} \varepsilon_{1 \cdots k \cdots \tau_{\nu_1} \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\sigma_k} \cdots g_{\sigma_{\nu_1}} \cdots g_{\tau_n} \Big) \frac{g_{\rho_k}}{g_{\tau_k}}$$

$$+ \sum_{1 \leqq \nu_1 < k} \varepsilon_{1 \cdots \rho_{\nu_1} \cdots \rho_k \cdots n}\, g_{\rho_1} \cdots g_{\sigma_{\nu_1}} \cdots g_{\sigma_k} \cdots g_{\rho_n}$$

$$+ \sum_{k < \nu_1 \leqq n} \varepsilon_{1 \cdots \rho_k \cdots \rho_{\nu_1} \cdots n}\, g_{\rho_1} \cdots g_{\sigma_k} \cdots g_{\sigma_{\nu_1}} \cdots g_{\rho_n} \Big\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^j \Big\{ \Big(\sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_j} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{\nu_1} \cdots \tau_{\nu_j} \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_j} \cdots g_{\tau_n}$$

$$- \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_{j-1} < k} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{\nu_1} \cdots \tau_{\nu_{j-1}} \cdots k \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{j-1}} \cdots g_k \cdots g_{\tau_n}$$

$$- \sum_{\substack{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_{j-2} < k \\ \nu_j > k}} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{\nu_1} \cdots \tau_{\nu_{j-2}} \cdots k \cdots \tau_{\nu_j} \cdots n}\, g_{\tau_1} \cdots g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{j-2}} \cdots g_k \cdots g_{\nu_j} \cdots g_{\tau_n}$$

$$- \cdots \Big) \frac{g_{\rho_k}}{g_{\tau_k}}$$

$$+ \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_{j-1} < k} \varepsilon_{1 \cdots \rho_{\nu_1} \cdots \rho_{\nu_{j-1}} \cdots \rho_k \cdots n}\, g_{\rho_1} \cdots g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{j-1}} \cdots g_k \cdots g_{\rho_n}$$

$$+ \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_{j-2} < k} \varepsilon_{1 \cdots \rho_{\nu_1} \cdots \rho_{\nu_{j-2}} \cdots \rho_k \cdots \rho_{\nu_j} \cdots n}\, g_{\rho_1} \cdots g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{j-2}} \cdots g_k \cdots g_{\nu_j} \cdots g_n \Big\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+\cdots+(-1)^n\left\{(\varepsilon_{\tau_1\cdots\tau_n}g_1\cdots g_n-\varepsilon_{\tau_1\cdots\tau_n}g_1\cdots g_n)\frac{g_{\rho_k}}{g_{\tau_k}}+\varepsilon_{\rho_1\cdots\rho_n}g_1\cdots g_n\right\}$$

これを整理して帰納法の仮定を使えば $=0$ となる。

故に補助定理6が従って補助定理5が従って補助定理4が証明されたことになる。

3. $$\Sigma_1=\sum_{\substack{\sigma_1\cdots\sigma_n\\ \tau_2\cdots\tau_n\\ \tau_\nu=\sigma_1\ \text{すくなくとも1つの}\ \nu\ \text{に対して}}}\varepsilon_\sigma f_1^{\sigma_1}g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n}A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$$

と表わせる。 σ_1 を固定する。$f_1^{\sigma_1}$ の係数を C_{σ_1} とすると

$$C_{\sigma_1}=\sum_{\substack{\sigma_2\cdots\sigma_n\\ \tau_2\cdots\tau_n\\ \tau_\nu=\sigma_1\ \text{ある}\ \nu\ \text{に対して}}}\varepsilon_{\sigma_1\cdots\sigma_n}g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n}A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$$

補助定理7 $C_{\sigma_1}=g_{\sigma_1}D$ とかける。 ここで D は σ_1 に独立である。

証明 C_1 と $C_{\varkappa_1}$ $\varkappa_1\neq 1$ を考察する。

$(\tau_2,\cdots,\tau_n)$ と $(\tau_2',\cdots,\tau_n')$ が同値であるとは；置換$(2,3,\cdots,n$の$)$ ρ が存在して $\tau_\nu'=\tau_{\rho_\nu}$ となることをいう。

$$B^1_{\tau_2\cdots\tau_n}=\sum_\sigma\varepsilon_{1\sigma_2\cdots\sigma_n}g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n}A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$$

とおく。 $(\tau_2,\cdots,\tau_n)$ の同値類を T とする。

$$B^1_T=\sum_{(\tau_2\cdots\tau_n)\in T}B^1_{\tau_2\cdots\tau_n}$$ とおくと

$$B^1_T=g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n}C^1_T\ ,\qquad C^1_T=\sum_{(\tau)\in T}C^1_{\tau_2\cdots\tau_n}$$

$$C^1_{\tau_2\cdots\tau_n}=\sum_\sigma\varepsilon_{1\sigma_2\cdots\sigma_n}A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$$ となる。

C^1_T の項において $(\tau_{\nu_1},\cdots,\tau_{\nu_r})$ が $(\sigma_{\nu_1},\cdots,\sigma_{\nu_r})$ の置換でないもののみの和を取ればよい。 同様にして

$$C_{\varkappa_1}=\sum_T B_T^{\varkappa_1} \qquad B_T^{\varkappa_1}=g_{\lambda_2}\cdots g_{\lambda_n} C_T^{\varkappa_1}, \quad C_T^{\varkappa_1}=\sum_{(\lambda)\in T} C^{\varkappa_1}_{\lambda_2\cdots\lambda_n}$$

$$C^{\varkappa_1}_{\lambda_2\cdots\lambda_n}=\sum_{\varkappa_2,\cdots,\varkappa_n}\varepsilon_{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_n} A_2^{\varkappa_2\lambda_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\varkappa_n\lambda_n}$$

となる。Σ_1の作り方より少くとも一つの$\tau_\nu=1$となる。$(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$を$\lambda_\mu=\tau_\mu\ (\mu\neq\nu)$, $\lambda_\nu=\varkappa_1$とし$(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$の同値類を$T'$とするとTと$T'$は一対一に対応し$C_T^1=C_{T'}^{\varkappa_1}$となる。なんとなれば$\varepsilon_{1\sigma_2\cdots\sigma_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$を$C_T^1$の項とする。$\sigma_\nu=\varkappa_1$となる$\nu$が存在する。$(\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu,\sigma_{\nu+1},\cdots,\sigma_n)$が$\{1,\cdots,n\}-\{\varkappa_1\}$の置換であるならば

$$\varepsilon_{1\sigma_2,\cdots,\sigma_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}=\varepsilon_{\varkappa_1\sigma_2\cdots\tau_\nu\cdots\sigma_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_\nu^{\tau_\nu\sigma_\nu}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$$

となり右辺の項は$C_{T'}^{\varkappa_1}$に現われる。$\tau_\nu\neq 1$のとき$\sigma_\mu=\tau_\nu$となるものがある。$(\sigma_2,\cdots,\tau_\mu,\cdots,\tau_\nu,\cdots,\sigma_n)$が$\{1,2,\cdots,n\}-\{\varkappa_1\}$の置換のとき$\varepsilon_{1\sigma_2\cdots\sigma_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}=\varepsilon_{\varkappa_1\sigma_2\cdots\tau_\mu\cdots\tau_\nu\cdots\sigma_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_\mu^{\tau_\mu\sigma_\mu}\wedge\cdots\wedge A_\nu^{\tau_\nu\sigma_\nu}\wedge\cdots\wedge A_n^{\tau_n\sigma_n}$となる。右辺は$C_{T'}^{\varkappa_1}$の項に現われる。以下同様にして$(\tau_{\ell_2},\tau_{\ell_3},\cdots,\tau_{\ell_n})$が$\{1,\cdots,n\}-\{\varkappa_1\}$の置換でないならば$\tau_{\ell_2},\cdots,\tau_{\ell_n}$はすべてに等しくなくなり矛盾である。故に$\varepsilon_{1\sigma_2\cdots\sigma_n} A_2^{\sigma_2\tau_2}\wedge\cdots\wedge A_n^{\sigma_n\tau_n}$は$C_{T'}^{\varkappa_1}$の項に含まれる。故に$C_T^1=C_{T'}^{\varkappa_1}$

$g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n}=g_1 h_T$, $\quad g_{\lambda_2}\cdots g_{\lambda_n}=g_{\varkappa_1} h_{T'}$ とおくと$h_T=h_{T'}$

$$C_1=\sum_T B_T^1=\sum_T g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n} C_T^1=\sum_T g_1 h_T C_T^1=g_1\sum_T h_T C_T^1$$

$$C_{\varkappa_1}=\sum_{T'} B_{T'}^{\varkappa_1}=\sum_{T'} g_{\tau_2}\cdots g_{\tau_n} C_{T'}^{\varkappa_1}=g_{\varkappa_1}\sum h_{T'} C_{T'}^{\varkappa_1}$$

$$D=\sum_T h_T C_T^1=\sum_{T'} h_{T'} C_{T'}^{\varkappa_1}$$

故に $C_1 = g_1 D$，$C_{x_1} = g_{x_1} D$ となり補助定理は証明された．

故に $D_g(f) = \dfrac{1}{f_1(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \Sigma_1 = \dfrac{1}{f_1(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \sum_{\sigma_1=1}^{n} f_1^{\sigma_1} C_{\sigma_1}$

$= \dfrac{1}{f_1(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \sum_{\sigma_1=1}^{n} f_1^{\sigma_1} g_{\sigma_1} D = \dfrac{D}{(f_2)^2 \cdots (f_n)^2}$ となり

定理 1 は証明された。

4　$f^*, g^* : W \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を C^2級の写像で

$f^* = (f^1, \ldots, f^n)$，$g^* = (g^1, \ldots, g^n)$

$f(x,y) = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu(x,y)(x_\nu - y_\nu) \neq 0$

$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{n} g^\nu(x,y)(x_\nu - y_\nu) \neq 0$ を満たすものとする。

g^*は y について正則とする。

補助定理 8　$q + r \geqq 1$，$q + r + s + 1 = n$ とすると

$$D_{1,q,r,s}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{r+q} \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ (-1)^q \frac{r}{r+q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ \frac{r}{r+q} D_{1,q,r-1,s+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

となる。証明は補助定理 2，3 と定理 1 を使えば容易である。

補助定理 9　特に $q = 0$，$r = n-1$ とすると

$$D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar\partial_x A(f^*, g^*)$$

補助定理 10　$q \geqq 1$，$q + r + 1 = n$ に対して重微分形式 $A(f^*, g^*)$，

$C(f^*, g^*)$ が存在して

$$D_{j+1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*)$$ となる。

証明は補助定理8を使えば容易である。

定理2（Cauchy－Fantappie の積分公式）

Gを$\mathbb{C}^n$の有界領域とし，∂Gは区分的にC^1級とする。

Wを$\partial G \times G$の近傍とする。 $g_1(x,y), \cdots, g_n(x,y) \in C^2(W)$と仮定する。 $\tilde{g} = (g_1, \ldots, g_n)$. $\omega(x) = \bigwedge_{l=1}^{n} dx_l$, $\omega'(\tilde{g}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} g_j \bigwedge_{k=1, k\neq j}^{n} \bar{\partial}_x g_k$

$$g(x,y) = (\tilde{g}, x-y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)\, g_j(x,y)$$ とおく。

$\partial G \times G$において$g(x,y) \neq 0$とする。

fが$\bar{G}$で正則ならば

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} f(x) \frac{\omega'(\tilde{g}) \wedge \omega(x)}{(\tilde{g}, x-y)^n}$$ が成立する。

証明 $$(n-1)!\, g^{-n}\, \omega'(\tilde{g}) = D\left(\frac{\tilde{g}}{g}, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{g}\right), \ldots, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)\right)$$

であり $$D\left(\frac{\tilde{g}}{g}, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{g}\right), \ldots, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)\right) - D\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \ldots, \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right)\right)$$

$$= \bar{\partial}_x \beta$$ となる。

故に $$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} f(x) \frac{\omega'(\tilde{g}) \wedge \omega(x)}{(\tilde{g}, x-y)^n} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} f(x) \frac{\omega'(\bar{x}-\bar{y}) \wedge \omega(x)}{|x-y|^{2n}}$$

$$= f(y)$$

5 $W = \{(x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \,;\, x \neq y\}$ とする。

するとW上で

$$B_{nj}(x,y) = (-1)^j \binom{n-1}{j} D_{j+1}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$= (-1)^j \binom{n-1}{j} D_{1,j,n-j-1}\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_y\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right)\right)$$

が定義される。

定義4　$B_{nq}(x,y)$を$(0,q)$形式に対するBochner-Martinelli の核という。

補助定理11　$\bar{\partial}_x B_{nq}(x,y) = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n,q-1}(x,y)$ が成立する。
ここで $B_{n,-1} = B_{nn} = 0$ とおく。

証明　補助定理5より

$$D_{1,q,n-q-1}\left(\bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \bar{\partial}_y\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right)\right) = 0$$

$$D_{q+1,n-q-1}\left(\bar{\partial}_y\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right)\right) = 0$$

に注意すれば証明は容易である。

補助定理12　γをG上のC^∞-$(0,q+1)$形式とし有界な係数をもつとする。すると　$\alpha(y) = \int_G \gamma(x) \wedge B_{n,q}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^{n} dx_\lambda$
はGにおいて無限回連続微分可能である。

証明　積分の存在は被積分形式の係数が$O\left(\frac{1}{|x-y|^{2n-1}}\right)$であることから従う。$y_0 \in G$とする。$f$を$supp(f) \subset G$, $0 \leqq f \leqq 1$, y_0の近傍で$f \equiv 1$となる$C^\infty(\mathbb{C}^n)$函数とする。
すると$\gamma = f\gamma + (1-f)\gamma$となる。$(1-f)\gamma$の積分は$y_0$で$C^\infty$である。故に$\gamma$を全空間で定義された$C^\infty$形式で台が$G$に含まれると仮定してよい。すると

$$\frac{\partial \alpha(y_0)}{\partial y_j} = \int_G \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_j} \wedge B_{n,q}(x,y_0) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^{n} dx_\lambda$$

となりαはC^∞級である。

定理3　γを$\bar{G}$上の$C^\infty(0,q)$形式とする。　すると各$y\in G$に対して，
$$\gamma(y)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\Big[\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_{\lambda=1}^{n}dx_\lambda$$
$$-\int_G\bar\partial_x\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_{\lambda=1}^{n}dx_\lambda-\bar\partial_y\int_G\gamma(x)\wedge B_{n,q-1}(x,y)\wedge\bigwedge_{\lambda=1}^{n}dx_\lambda\Big]$$
が成立する。

証明　$d_x(\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda)=\bar\partial_x(\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda)$
$$=\bar\partial_x\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda+\gamma(x)\wedge\bar\partial_y B_{n,q-1}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
となる。　まず$q=0$のときに成立することを証明する。

$y\in G$に対して　$K_\varepsilon=\{x;|x-y|<\varepsilon\}\subset\subset G$　となるようにεを選ぶ。$G_\varepsilon=G-K_\varepsilon$とおく。　ストークスの定理によって
$$\int_{G_\varepsilon}\bar\partial_x\gamma(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda=\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
$$-\int_{\partial K_\varepsilon}\gamma(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
となる。
$$\int_{\partial K_\varepsilon}\gamma(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda=\int_{\partial K_\varepsilon}[\gamma(x)-\gamma(y)]\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
$$+\int_{\partial K_\varepsilon}\gamma(y)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
右辺の第1積分は0に収束する。　第2積分は$x-y=\varepsilon t$とおいて計算すると
$$\int_{\partial K_\varepsilon}\gamma(y)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2\pi i)^n\gamma(y)$$
となる。故に
$$\int_G\bar\partial_x\gamma(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda=\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
$$-(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2\pi i)^n\gamma(y)$$
となる。

次にqは任意とし，$y_0\in G$ とする。Kはy_0の近傍とする。$0\leqq f\leqq 1$, $f\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $supp(f)\subset G$, Kで$f\equiv 1$ となる函数fを選ぶ。$y\in K$に対して ストークスの定理を適用して

$$\int_G \bar\partial_x\left((1-f(x))\gamma(x)\right)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda+\bar\partial_y\int_G(1-f(x))\gamma(x)\wedge B_{n,q-1}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
$$=\int_{\partial G}(1-f(x))\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
となる。

最後にγを台がGに含まれる$C^\infty(\mathbb{C}^n)$形式とした場合に

$$\gamma(y)=-\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\left[\int_G\bar\partial_x\gamma(x)\wedge B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\right.$$
$$\left.+\bar\partial_y\int_G\gamma(x)\wedge B_{n,q-1}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\right]$$

が証明できればよい。［　　　］内の $d\bar y_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar y_{i_q}$ の係数は $\int_G\bar\partial_x\gamma_{i_1\cdots i_q}(x)\wedge B_{n0}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$ となる。

これは $-\frac{(2\pi i)^n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}\gamma_{i_1\cdots i_q}(y)$ に等しい。故に定理は成立する。

定義 5　定理 3 を一般化された Bochner-Martinelli の公式という。

§3　Cauchy-Riemann の微分方程式の解

1. 以下GをC^5級の境界∂Gをもつ有界な強擬凸領域とする。すると∂Gの近傍Uにおいて定義された強多重劣調和函数ϕでUで$d\phi\neq 0$, $G\cap U=\{x\in U,\ \phi(x)<0\}$, $\phi\in C^5(U)$となるものが存在する。$G_\nu\subset\subset G_{\nu+1}\subset\subset G$, $\bigcup_{\nu\geqq 1}G_\nu=G$となる$C^5$級の境界$\partial G_\nu$をもつ強擬凸領域$\{G_\nu\}$が存在する。

Ramirez は次の定理に述べる函数 $g(x,y)$ が存在することを証明した。ここで $g(x,y)$ が C^3 級であることは ∂G が C^5 級であることから出る。

定理4　$\partial G\times\overline{G}$ の近傍 W' と W' 上の C^3 級函数 $g(x,y)$ で次の条件を満たすものが存在する。

1) $g(x,y)$ は y について正則

2) すべての y に対して $g(y,y)=0$

3) $x\neq y$, $(x,y)\in\partial G\times\overline{G}$ に対して $\mathrm{Re}\, g(x,y)>0$

更に Ramirez は

$$g(x,y)=\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x,y)(x_\nu-y_\nu)\quad,\ g_\nu(x,y)\in C^3(W')$$

$g_\nu(x,y)$ は y について正則，

と書けることを証明した。

2.

$P=\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{g_\nu(x,y)}{g(x,y)}dx_\nu$ に対して正則一次変換を行うと

P は $\widetilde{P}=\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{\widetilde{g}_\nu(\widetilde{x},\widetilde{y})}{\widetilde{g}(x,\widetilde{y})}d\widetilde{x}_\nu$ に移り　g は $\widetilde{g}$ に移ったとすると

$\widetilde{g}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\sum_{\nu=1}^{n}\widetilde{g}_\nu(\widetilde{x},\widetilde{y})(\widetilde{x}_\nu-\widetilde{y}_\nu)$ が成立する。

定義6　$P(x,y)=\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{g_\nu(x,y)}{g(x,y)}dx_\nu$ を $g^*=(g_1,\cdots,g_n)$ に対する Ramirez-Henkin の微分形式という。

$$\begin{aligned}\Omega_{nq}(x,y)&=(-1)^q\binom{n-1}{q}D_{q+1}(g^*)\\&=(-1)^q\binom{n-1}{q}D_{1,q,n-q-1}\left(\frac{g^*}{g},\bar\partial_y\left(\frac{g^*}{g}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)\end{aligned}$$ とおく。

$q\geq 1$ に対しては $\Omega_{nq}=0$ である。

$g=0$ に対しては Ω_{ng} は $W=W'-\{(x,y)\in W';\ g(x,y)=0\}$ 上で定義される。

定理５　W 上の C^3 級の重微分形式 $A_{ng}(x,y)$、と $C_{ng}(x,y)$ が存在して　$B_{ng}(x,y)=\Omega_{ng}(x,y)+\bar\partial_x A_{ng}(x,y)+\bar\partial_y C_{ng}(x,y)$　とかける。ここで

$$A_{n0}=D_{1,1,n-2}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_x\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right)\right)+D_{1,1,n-3,1}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_x\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)+\cdots+D_{1,1,1,n-3}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_x\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)+D_{1,1,n-2}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$A_{ng}=C_1'D_{1,1,g,n-g-2}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_y\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$
$$+C_2'D_{1,1,g,n-g-3,1}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_y\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+C_{r-1}'D_{1,1,g,1,n-g-3}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_y\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$
$$+C_r'D_{1,1,g,n-g-2}\left(\frac{g^*}{g},\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2},\bar\partial_y\left(\frac{\bar x-\bar y}{|x-y|^2}\right),\bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$C_p'\in\mathbb{C}$　と表わせる。証明は補助定理９と１０より明らかである。

補助定理１より A_{ng} と Ω_{ng} に現われてくる項は正則一次変換によって同じ型に移る。よって積分する場合~~は~~も正則一次変換を行って差し支えない。

定理６　C^5級の境界をもつ強擬凸領域 $G\subset\subset\mathbb{C}^n$ に対して $\partial G\times G$ を含む開集合 W 上の重微分形式 $\Omega_{ng}(x,y)$ と $A_{ng}(x,y)$ が

存在して，γを$\bar{G}$上の$C^\infty(0,g)$形式とすると　$y\in G$に対して

$$\gamma(y)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\Big[\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge\Omega_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda+(-1)^{g+1}\int_{\partial G}\bar\partial_x\gamma(x)\wedge A_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$
$$-\int_G\bar\partial_x\gamma(x)\wedge B_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda+\bar\partial_y P(y)\Big]$$

となる。

証明　定理5より　$\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge B_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda=\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge\Omega_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$

$$+\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge\bar\partial_x A_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda+\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge\bar\partial_y C_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$

である。∂Gはコンパクトだから　$\int_{\partial G}d_x\left(\gamma(x)\wedge A_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\right)=0$

を使えば　$0=\int_{\partial G}\bar\partial_x\gamma(x)\wedge A_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda+(-1)^g\int_{\partial G}\gamma(x)\wedge\bar\partial_x A_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$

を得る。これを定理3に代入すると求める公式を得る。

3.　βを有界な係数をもつG上の可閉$C^\infty(0,g+1)$形式とする。

$$\gamma_\nu(y)=-\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\int_{G_\nu}\beta(x)\wedge B_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$
$$\tau_\nu(y)=(-1)^{g+1}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\int_{\partial G_\nu}\beta(x)\wedge A_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

とおく。

補助定理13

$\gamma_\nu(y)$は$\gamma(y)=-\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\int_G\beta(x)\wedge B_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$に$G$上広義一様収束する。また$\gamma_\nu(y)$の各導函数は$\gamma(y)$の対応する導函数に$G$上広義一様収束する。

証明　$G'\subset\subset G$, $G'\subset\subset G_{\nu_0}$とする。　$y\in G'$, $\nu\geqq\nu_0$に対して

$$\gamma(y)-\gamma_\nu(y)=-\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\int_{G-G_\nu}\beta(x)\wedge B_{ng}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$

となる。$|\gamma(y)-\gamma_\nu(y)|\leqq K\cdot\mathrm{mes}(G-G_\nu)\longrightarrow0\ (\nu\to\infty)$

となることより従う。

導函数の収束は補助定理12より積分記号下の微分ができることより明らかである。

補助定理14

ς_νはGにおいてすべての導函数までこめて広義一様収束する。

証明　$G' \subset\subset G_{\nu_0}$, $\nu \geqq \mu \geqq \nu_0$ とする。

すると $y \in G'$ に対して

$$\varsigma_\nu(y) - \varsigma_\mu(y) = \int_{\partial G_\nu} \beta(x) \wedge Ang(x,y) \wedge \hat{\bigwedge_\lambda} dx_\lambda - \int_{\partial G_\mu} \beta(x) \wedge Ang(x,y) \wedge \hat{\bigwedge_\lambda} dx_\lambda$$

$$= \int_{\partial(G_\nu - G_\mu)} \beta(x) \wedge Ang(x,y) \wedge \hat{\bigwedge_\lambda} dx_\lambda = \int_{G_\nu - G_\mu} d_x(\beta(x) \wedge Ang(x,y)) \wedge \hat{\bigwedge_\lambda} dx_\lambda$$

$$= \pm \int_{G_\nu - G_\mu} \beta(x) \wedge \bar{\partial}_x Ang(x,y) \wedge \hat{\bigwedge_\lambda} dx_\lambda$$

故に $|\varsigma_\nu(y) - \varsigma_\mu(y)| \leqq K\, Mes(G_\nu - G_\mu) \longrightarrow 0 \quad (\nu, \mu \to \infty)$

故にς_νはG上広義一様収束する。導函数の広義一様収束も明らかである。

以上の準備の下に

定理7　$\alpha = \gamma + \varsigma$, $(\varsigma = \lim_{\nu\to\infty} \varsigma_\nu)$ は　$\bar{\partial}\alpha = \beta$ を満たす。

証明　Gは擬凸領域であるから$\bar{\partial}\eta = \beta$をみたす$G$上の$C^\infty$ $(0,q)$形式ηが存在する。　すると定理6より　$y \in G_{\nu_0}$, $\nu > \nu_0$ に対して，　$\eta(y) = \varsigma_\nu(y) + \gamma_\nu(y) + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\Big[\int_{\partial G_\nu} \eta(x) \wedge \Omega_{nq}(x,y) \wedge \hat{\bigwedge_\lambda} dx_\lambda + \bar{\partial}_y \Gamma_\nu(y)\Big]$　と表わせる。　すると

$\beta(y) = \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}\varsigma_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y)$　となる。$\nu \to \infty$とすると

$\beta(y) = \bar{\partial}\varsigma(y) + \bar{\partial}\gamma(y) = \bar{\partial}\alpha(y)$　となり　結局G全体

で $\partial\alpha = \beta$ が成立する。

§4 Cauchy-Riemann の微分方程式の解の評価

1. 補助定理15 ∂G の近傍 U' において強多重劣調和函数 ϕ で $d\phi \neq 0$; $G \cap U' = \{x \in U', \phi(x) < 0\}$ となるものが存在する。

更に l を ∂G 上の点 x_0 における ∂G の鉛直線とすると l は x_0 の近傍において等曲面 $\{x ; \phi(x) = c\}$ を垂直に切る。

証明 $x \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\delta(x)$ を x と ∂G との最小距離とする。

$$\tau(x) = \begin{cases} -\delta(x) & x \in G \text{ のとき} \\ \delta(x) & x \notin G \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。∂G の近傍で $\tau(x)$ は C^5 級で ∂G で強多重劣調和である。十分大きな $A > 0$ に対し $\phi(x) = \tau(x) e^{A\tau(x)}$ は ∂G の近傍で強多重劣調和である。かつ τ と同じ等曲面をもつ。故に ϕ はおめる函数である。

2. $U = \{x \in U' ; |\phi(x)| < \delta_0\} \subset\subset U'$ となるように U を選ぶ。

$y \in \overline{U \cap G}$ とする。

$y = (x_1' = -\rho_0, x_1'' = 0, \cdots, x_n'' = 0)$ $\quad \rho_0 \geqq 0$

$0 \in \partial G$，$\{x_1' = 0\}$ は 0 において ∂G に接する，ように座標系をえらぶ。 $0 \leqq \rho \leqq \rho_0$ に対し，

$F_\rho = \{x \in \overline{U} ; \phi(x) = \phi(\rho - \rho_0, 0 \cdots, 0)\}$ とおく。

この $\phi(x)$ に対し，$y \in U(\partial G)$ に対して Ramirez の証明によると，

(1) $g(x,y) = 2\sum_i (x_i - y_i)\phi_i(x) - \sum_{i,j}(x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_{ij}(x)$

$+ C\sum_{i,j}(x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_i(x)\phi_j(x) + O(\|x-y\|^3)$

となる。ここで $\phi_i = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$, $\phi_{ij} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}$, $\phi_{i\bar{j}} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}$ とする。

$\phi(y)$ を x においてテイラー展開し，(1) を代入すると，

(2) $\mathrm{Re}\, g(x,y) = \phi(x) - \phi(y) + \mathrm{Re}\left(C\sum_{i,j}(x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_i(x)\phi_j(x)\right)$

$+ \sum_{i,j}(x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j)\phi_{i\bar{j}}(x) + O(\|x-y\|^3)$

となる。 $\phi_i(x) = \phi_i(y) + O(\|x-y\|)$, $\phi_i(y) = 0$, $i \neq 1$ に対して

であるから，(2) より

(3) $\mathrm{Re}\, g(x,y) = \phi(x) - \phi(y) + \mathrm{Re}\left(C\phi_1(y)^2(x_1 - y_1)^2\right)$

$+ \sum_{i,j}(x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j)\phi_{i\bar{j}}(x) + O(\|x-y\|^3)$

となる。定数 $A_1, A_2, \dots > 0$ が存在して $\bar{U}$ 上で

(4) $A_1 \leqq \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial n}\right| \leqq A_2$ となる。

$x \in \bar{U}$, $t \in \mathbb{C}^n$ に対して

(5) $\sum_{i,j}\phi_{i\bar{j}}(x)\, t_i \bar{t}_j \geqq A_3 \|t\|^2$ となる。

(6) $|O(\|x-y\|^3)| \leqq A_4 \|x-y\|^3$ となる。

$x \in F_\sigma$ のとき $\rho(x) = \sigma$ と定義する。 すると

$\rho(x) = x_1' - y_1' + O(\|x-y\|^2)$

(7) $|O(\|x-y\|^2)| \leqq A_5 \|x-y\|^2$

$x \in F_\rho$, $\rho \geqq 0$ とする。 すると $\phi(x) = \phi(\rho - \rho_0, 0, \dots, 0)$

$\phi(x) - \phi(y) = \phi(\rho - \rho_0, 0 \dots, 0) - \phi(-\rho_0, 0, \dots, 0) \geqq A_1 \rho$

(5) より

(8) $\sum_{i,j} \phi_{i\bar{j}}(x)(x_i-y_i)(\overline{x_j}-\overline{y_j}) \geqq A_3 R^2$

更に $|x_1-y_1|^2 = |x_1'-y_1'|^2+|x_1''|^2$

$|x_1'-y_1'|^2 = |\rho(x)+O(\|x-y\|^2)|^2 \leqq 2\rho^2(x)+2A_5^2R^4$

すると

(9) $|c|\,|Re(\phi_1^2(y))(x_1-y_1)^2| \leqq |c|\,|\phi_1(y)|^2(|x_1''|^2+2\rho^2+2A_5^2R^4)$

$\leqq \frac{1}{4}|c|A_2^2|x_1''|^2+\frac{1}{2}|c|A_2^2\rho^2+\frac{1}{2}|c|A_2^2A_5^2R^4$

$|Re\, g(x,y)| \geqq A_1\rho+A_3R^2-\frac{1}{4}|c|A_2^2|x_1''|^2-\frac{1}{2}|c|A_2^2\rho^2$

となり　$\rho\leqq\rho_1$, $R\leqq R_1$,　R_1, ρ_1 を十分小にとると，正の定数 B_1, B_2 が存在して

(10) $|Re\, g(x,y)| \geqq B_1R^2-B_2|x_1''|^2$

となる。(1)とテーラー展開から

(11) $Im\, g(x,y) = \dfrac{\partial\phi(y)}{\partial x_1'}x_1''+O(\|x-y\|^2)$

となる。　(11)の剰余項に対して

$O(\|x-y\|^2)\leqq A_6\|x-y\|^2$ が成り立つ。　(4)を考慮して

(12) $|Im\, g(x,y)| \geqq A_1x_1''-A_6R^2$

となる。(10)と(12)より

(13) $|g(x,y)| \geqq \max(|Re\, g(x,y)|,\ |Im\, g(x,y)|)$

$\geqq \max(B_1R^2-B_2|x_1''|^2,\ A_1|x_1''|-A_6R^2)$

$\geqq \max(B_1R^2, A_1|x_1''|-A_6R^2)-B_2|x_1''|^2$

となる。

補助定理16　　$\alpha, \beta, \gamma>0$ に対して

$$\max(\alpha, \beta-\gamma) \geqq \frac{1}{2+\frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha+\beta)$$

が成立する。

証明　　$\alpha \geqq \beta-\gamma$ とする。　すると

$$\alpha = \frac{\alpha}{2\alpha+\gamma}(2\alpha+\gamma) = \frac{1}{2+\frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha+\alpha+\gamma) \geqq \frac{1}{2+\frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha+\beta)$$

$\beta-\gamma \geqq \alpha$ とする。すると

$(\alpha+\gamma)^2 \leqq \beta(\alpha+\gamma)$，故に $\alpha^2+\alpha\beta \leqq 2\alpha\beta-2\alpha\gamma-\gamma^2+\beta\gamma$

$$\alpha(\alpha+\beta) \leqq (\beta-\gamma)(2\alpha+\gamma)$$

よって　$\dfrac{\alpha}{2\alpha+\gamma}(\alpha+\beta) \leqq \beta-\gamma$，　故に $\dfrac{1}{2+\frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha+\beta) \leqq \beta-\gamma$

となり補助定理は証明された。

故に　$\max(B_1R^2, A_1|x_1''|-A_6R^2) \geqq \dfrac{1}{2+\frac{A_6}{B_1}}(A_1|x_1''|+B_1R^2)$

$R=0$ または $x_1''=0$ に対しても成立する。

(13) より正の定数 C_1, C_2 が存在して

$|g(x,y)| \geqq C_1|x_1''|+C_2R^2-B_2|x_1''|^2$　となる。

R_1 を十分小さく選ぶと，$C_1-B_2|x_1''|>0$　とできる。

故に定数 $C_3>0$ が存在して

$|g(x,y)| \geqq C_3|x_1''|+C_2R^2$ となる。

補助定理17

δ_0 を十分小と仮定し，$U=\{x; |\phi(x)|<\delta_0\}$ とする。

すると定数 R_1, A が存在し，$y\in\overline{U\cap G}$，$\|x-y\|=R<R_1$

$\phi(x)>\phi(y)$ に対し，　$|g(x,y)| \geqq A(R^2+|x_1''|)$

が成立する。

補助定理18　$\nu_0 \geqq 1$ と定数 $K>0$ が存在して $\nu \geqq \nu_0$, $y \in G_\nu$, $x \in \partial G_\nu$, $|x-y| \geqq R_0$ なる ν, x, y に対して $|g(x,y)| \geqq K$ となる。

証明　定理は成立しないとする。すると任意の ν_0, $K>0$ に対し, $\nu \geqq \nu_0$ が存在して $x_\nu \in \partial G_\nu$, $y_\nu \in G_\nu$, $|x_\nu - y_\nu| \geqq R_0$ $|g(x_\nu, y_\nu)| < K$ となる x_ν, y_ν が存在する。

$K_\mu > 0$, $K_\mu \longrightarrow 0$　$\nu_\mu \longrightarrow \infty$ $(\mu \to \infty)$　を選んで,

$x_{\nu_\mu} \in \partial G_{\nu_\mu}$, $y_{\nu_\mu} \in G_{\nu_\mu}$,　$|x_{\nu_\mu} - y_{\nu_\mu}| \geqq R_0$, $|g(x_{\nu_\mu}, y_{\nu_\mu})| < K_\mu$

とできる。　$x_{\nu_\mu} \longrightarrow x_0$, $y_{\nu_\mu} \longrightarrow y_0 \in \overline{G}$　としてよい。

$x_0 \in \partial G$, $|g(x_0, y_0)| \leqq \lim_{\mu\to\infty} K_\mu = 0$

故に $x_0 = y_0$, 他方 $|x_0 - y_0| \geqq R_0$　これは矛盾である。

3. $\nu_0 = 1$ としてよい。

$y \in \overline{G}_{\nu_0}$

$\nu \geqq \nu_0$ に対して　$\partial G_\nu \cap \{x ; |x-y| \leqq R_0\}$ は

$x_1' = f_\nu(x_1'', \ldots, x_n', x_n'')$ で与えられる。

$$\zeta_\nu(y) = \int_{\partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_n g(x,y) \wedge \bigwedge_\lambda dx_\lambda$$

$$= \int_{H_\nu} \beta(x) \wedge A_n g(x,y) \wedge \bigwedge_\lambda dx_\lambda + \int_{\partial G_\nu - H_\nu} \beta(x) \wedge A_n g(x,y) \wedge \bigwedge_\lambda dx_\lambda$$

ここで $H_\nu = \partial G_\nu \cap \{x ; |x-y| \leqq R_0\}$　とおく。第2積分で補助定理18より $A_n g$ の係数は ν と y に独立に有界である。

故に $K>0$ が存在して

$$\left|\int_{\partial G_\nu - H_\nu}\beta(x)\wedge A_{n,g}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\right|\leqq K|\beta|$$ となる。

オ1積分を考える。オ1積分は

$$\int_{H_\nu}\beta(x)\frac{g_{\sigma_1}}{g}\frac{\bar{x}_{\sigma_2}-\bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2}\wedge\bigwedge_{\rho=3}^{g+2}\bar\partial_y\left(\frac{\bar{x}_\rho-\bar{y}_\rho}{|x-y|^2}\right)\wedge\bigwedge_{\varkappa=g+3}^{g+\nu+2}\bar\partial_x\left(\frac{\bar{x}_{\sigma_\varkappa}-\bar{y}_{\sigma_\varkappa}}{|x-y|^2}\right)\wedge\bigwedge_{\mu=g+\nu+3}^{n}$$

$$\bar\partial_x\left(\frac{g_{\sigma_\mu}}{g}\right)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda$$ の一次結合である。

$$\bar\partial_y\left(\frac{\bar{x}_\mu-\bar{y}_\mu}{|x-y|^2}\right)=-\frac{d\bar{y}_\mu}{|x-y|^2}+\frac{\bar{x}_\mu-\bar{y}_\mu}{|x-y|^4}\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda-y_\lambda)d\bar{y}_\lambda$$

$$\bar\partial_x\left(\frac{\bar{x}_\mu-\bar{y}_\mu}{|x-y|^2}\right)=\frac{d\bar{x}_\mu}{|x-y|^2}-\frac{\bar{x}_\mu-\bar{y}_\mu}{|x-y|^4}\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda-y_\lambda)d\bar{x}_\lambda$$

$$\bar\partial_x\left(\frac{g_\mu}{g}\right)=\frac{\bar\partial_x g_\mu}{g}-\frac{g_\mu}{g^2}\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda-y_\lambda)\bar\partial_x g_\lambda$$

であるから $d\bar{y}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{y}_{i_g}$ の係数として

$$\int_{H_\nu}\beta(x)\wedge\frac{g_{\sigma_1}}{g}\frac{\bar{x}_{\sigma_2}-\bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2}\prod_{\rho=3}^{g+2}h_{\sigma_\rho}\prod_{\varkappa=g+3}^{g+\nu+2}h_{\sigma_\varkappa}\wedge\bigwedge_{\mu=g+\nu+3}^{n}\frac{\bar\partial_x g_{\sigma_\mu}}{g}\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\bigwedge_\ell d\bar{x}_\ell$$

か又は

$$\int_{H_\nu}\beta(x)\wedge\frac{g_{\sigma_1}}{g}\frac{\bar{x}_{\sigma_2}-\bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2}\prod_{\rho=3}^{g+2}h_{\sigma_\rho}\prod_{\varkappa=g+3}^{g+\nu+2}h_{\sigma_\varkappa}\wedge\bigwedge_{\substack{\mu=g+\nu+3\\ \mu\neq\tau}}^{n}\frac{\bar\partial_x g_{\sigma_\mu}}{g}\wedge g_{\sigma_\tau}\bar\partial_x\left(\frac{1}{g}\right)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\wedge\bigwedge_\ell d\bar{x}_\ell$$

という形である。

ここで $h_{\sigma_\rho}(x,y)$ は $\pm\dfrac{1}{|x-y|^2}$ かまたは $\pm\dfrac{(\bar{x}_\mu-\bar{y}_\mu)(x_\lambda-y_\lambda)}{|x-y|^4}$

である。 g_μ の偏微分を g_μ', β の係数を b とする。

オ1積分について、 $x_1'=f_\nu(x_1'',\ldots,x_n',x_n'')$ を代入して、

$$\int_{H_\nu'}b(x)\frac{g_{\sigma_1}}{g}\frac{\bar{x}_{\sigma_2}-\bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2}\prod_{\rho=3}^{g+\nu+2}h_{\sigma_\rho}\prod_{\mu=g+\nu+3}^{n}\frac{g'_{\sigma_\mu}}{g}f_\nu'dx_1''\cdots dx_n'dx_n''$$

となる，ここで H_ν' は点 $(-p_\nu,0,\ldots,0)$ における ∂G_ν の接平面

上への H_ν の射影を表わし，f_ν' は f_ν の偏導函数を表わす。

f_ν' は ν と y に独立に有界である。

更に　$\dfrac{|\bar{x}_{\sigma_2}-\bar{y}_{\sigma_2}|}{|x-y|^2} \leqq \dfrac{1}{r}$　，　$|h_{\sigma_p}(x,y)| \leqq \dfrac{1}{r^2}$

となる。ここで r は接平面におけるユークリッドの距離である。補助定理17より

$$\frac{1}{|g|} \leqq C\frac{1}{r^2+|x_1''|}$$

となる。故に才1積分の絶対値は

$$K|\beta|\int_{r\leqq R_0}\frac{1}{r^{2n-1}+r^{2n-3}|x_1''|}dx_1''\cdots dx_n'dx_n''$$

より小さい。$x_1''=r\sin\alpha$ と極座標変換すると，結局

$$\int_0^{R_0}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\alpha}{r+|\sin\alpha|}d\alpha$$ の存在を示せばよいが，

これは $\log(1+R_0)+R_0\log(1+\frac{1}{R_0})$ となり存在する。

才2積分を考察する。(1)より

$g_u(y,y)=2\phi_u(y)=0\quad u\neq 1$　となる。故に $u>1$ に対して　$|g_u(x,y)|\leqq DR\quad u>1$

となる。σ_p を $(1,2,\cdots,n)$ の置換とする。

$\sigma_1\neq 1$ か又は $\sigma_2\neq 1$　である。

$\sigma_1\neq 1$ のとき　$\left|\dfrac{g_{\sigma_1}}{g}\right| \leqq \dfrac{DRC}{R^2} \leqq C'\dfrac{1}{r}$

$$\left|\frac{g_{\sigma_2}\,g_\alpha'(x_\alpha-y_\alpha)}{g^2}\right| \leqq \frac{CR}{(R^2+|x_1''|)^2} \leqq \frac{C''}{r^3+r|x_1''|}$$

$\sigma_2\neq 1$ のとき

$$\left|\frac{g_\sigma}{g}\right| \leqq C\frac{1}{r^2}\ ,\quad \left|\frac{g_{\sigma_2}\,g_\alpha'(x_\alpha-y_\alpha)}{g^2}\right| \leqq \frac{CDR^2}{(R^2+|x_1''|)^2} \leqq C'''\frac{1}{r^2+|x_1''|}$$

いづれの場合も二つの積は

$\leqq \dfrac{C}{r^4+r^2|x_1''|}$ となる。

残りの項は $\dfrac{C}{r^{2n-5}}$ で押さえられる。

故に第2積分の絶対値は

$$C|\beta|\int_{r\leqq R_0}\frac{1}{r^{2n-1}+r^{2n-3}|x_1''|}dx_1''\cdots dx_n' dx_n''$$ より小さい。

この積分は存在する。

故に $|\delta|\leqq K|\beta|$ を得る。

γに対しては

$$|\gamma|\leqq|\beta|\left|\int_G B_{nq}(x,y)\wedge\bigwedge_\lambda dx_\lambda\right|\leqq K|\beta|$$

となる。従って次の定理を得る。

定理8　GをC^5級の境界をもつ強擬凸領域とすると任意のG上の$\bar\partial$閉$C^\infty(0,q+1)$形式βに対してG上の$C^\infty(0,q)$形式αと正の定数Kが存在して $\bar\partial\alpha=\beta$, $|\alpha|\leqq K|\beta|$ となる。

§5　コホモロジーの消滅定理

補助定理19　GはC^5級の境界をもつ強擬凸領域とする。

$K_1'\subset\subset K_1, \cdots, K_r'\subset\subset K_r$ は$2r$個の超球とする。

$D=\bigcap_\rho K_\rho\cap G$, $D'=\bigcap_\rho K_\rho'\cap G$ とおく。

すると次の性質を満たす定数Lが存在する。

D上の各$\bar\partial$閉$C^\infty(0,q+1)$形式βに対してD'上の$C^\infty(0,q)$形式αで

$\bar\partial\alpha=\beta|D'$, $|\alpha|_{D'}\leqq L|\beta|_D$

となるものが存在する。

証明　GとK_ρに対してそれぞれ定理4の条件をみたすg_νとg_ν^ρが存在する。次の性質をもつ$h_\nu(x,y)$をつくる。

1) $h_\nu(x,y)$は$U(\partial D)\times V(\overline{D'})$で3回連続微分可能かつ$y$について正則.

2) $h(x,y)=\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x,y)(x_\nu-y_\nu)$ は $y\in\overline{D'}$ と $x\in\partial D-\{y\}$ に対して $\mathrm{Re}\, h(x,y)>0$

3) $y\in\overline{D'}$, $x\in\partial D\cap V(\overline{D'})$に対して$h_\nu(x,y)=g_\nu(x,y)$

$U(\partial D)\times D'$においてこの$h_\nu(x,y)$を使って$\Omega_{nq}(x,y)$と$A_{nq}(x,y)$を定義する。定理6は$y\in D'$について成立する。

$G_\nu\subset\subset G_{\nu+1}\subset\subset G$, $K_{\rho\nu}\subset\subset K_{\rho\nu+1}\subset\subset K_\rho$, $\bigcup_{\nu\geq 1}G_\nu=G$, $\bigcup_{\nu\geq 1}K_{\rho\nu}=K_\rho$

となるG_ν, $K_{\rho\nu}$を作る。$D_\nu=G_\nu\cap\bigcap_\rho K_{\rho\nu}$とおく。§3の$G_\nu$をすべて$D_\nu$でおきかえる。すると$\bar\partial\alpha=\beta\,|D'$となる解を得る。評価式も同様に成り立つ。

定義7　$\mathcal{O}$をG上の正則函数の芽の層とする。

$\mathcal{D}_{0q}$をG上の$C^\infty(0,q)$形式の芽の層とする。

$\mathcal{D}=\mathcal{D}_{0,0}$とする。$\mathfrak{U}$は$G$の開被覆とする。

定義7　$C=\{C_{i_0\cdots i_p}\}\in C^p(\mathfrak{U},\mathcal{D}_{0q})$に対して

$|C|=\sup_{i_0\cdots i_p}|C_{i_0\cdots i_p}|_{U_{i_0\cdots i_p}\cap G}$　とおく。

定義8　$\mathfrak{U}=\{K_i, i\in I\}$を$\overline{G}$の有限開被覆とする。

$\mathfrak{U}$が許容的であるというのはK_iが球であって$K_i\cap G$が区分

的になめらかな境界をもつことである。

$\mathfrak{U}_1=\{K_i^1, i\in I_1\}$, $\mathfrak{U}_2=\{K_i^2 ; i\in I_2\}$, ...

と $\bar{G}$ の許容的被覆の列で次の条件を満たすとする。

1) $\mathfrak{U}_r$ は $\mathfrak{U}_{r-1}$ より細かい。

2) $\bar{G}$ の各開被覆に対して この列の中に細分が存在する。

3) 細分写像　$\tau_r : I_r \longrightarrow I_{r-1}$ が存在して $\overline{K_i^r} \subset K^{r-1}_{\tau_r i}$ となる。

このような列の存在は容易に解る。

$$(\tau_r f)_{i_0\cdots i_p} = \rho(K^r_{i_0\cdots i_p}, K^{r-1}_{\tau_r(i_0),\cdots,\tau_r(i_p)}) f_{\tau_r(i_0)\cdots\tau_r(i_p)}$$

によって　$\tau_r : C^p(\mathfrak{U}_{r-1}, \mathcal{D}_{0q}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}_r, \mathcal{D}_{0q})$

を定義する。　$s \geqq r$ に対して

$\tau_{rs} = \tau_s \circ \tau_{s-1} \circ \cdots \tau_{r+1} \circ \tau_r$ とすると、

$\tau_{rs} : C^p(\mathfrak{U}_{r-1}, \mathcal{D}_{0q}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}_s, \mathcal{D}_{0q})$　となる。

$\tau_{r,r-1}$ は恒等写像とする。

任意の r に対して1の C^∞ 分割 $\{\varphi_i^r ; i\in I_r\}$ を作る。

補助定理20　$r\geqq 1$ と $1\leqq q\leqq n$ に対して次の性質をもつ実数 M_{rq} が存在する。任意のコサイクル $c\in C^q(\mathfrak{U}_r, \mathcal{O})$ に対してコチェイン $b\in C^{q-1}(\mathfrak{U}_{r+q-1}, \mathcal{O})$ が存在して

$\delta b = \tau_{r+1, r+q-1} c$, $|b| \leqq M_{rq}|c|$　　となる。

証明　$\mathcal{Z}_{0,p}$ を閉 $C^\infty(0,p)$ 形式の芽の層とする。

$C^q(\mathfrak{U}_r, \mathcal{Z}_{0,p})$ に対して定理が成立することを示す。

a)　$q=1$ のとき、

$c \in C^1(\mathfrak{U}_r, Z_{0p})$ $\delta c = 0$ とする。

$c'_{i_0} = \sum_i \varphi_i^r c_{i i_0}$ と定義する。 すると $\delta c' = c$ となる。

$|c'| \leqq |c|$ となる。$c^2 = \partial c'$ で定義すると

$c^2 \in C^0(\mathfrak{U}_r, Z_{0,p+1})$, であり，$\sum|\partial\varphi_i^r| \leqq N_r$ となるN_rが存在するから，$|c^2| \leqq N_r|c|$ となる。$\delta c^2 = 0$ となることから

$c^2 \in \Gamma(G, Z_{0,p+1})$ となる。故に定理8より $b' \in \Gamma(G, D_{0p})$ が存在して $\partial b' = c^2$, $|b'| \leqq K N_r |c|$ となる。

$b = c' - b'$ とおくと $b \in C^0(\mathfrak{U}_r, D_{0p})$ であり

$|b| \leqq |c'| + |b'| \leqq (1 + K N_r)|c|$, $\delta b = c$

$\partial b = 0$ となる。故に $b \in C^0(\mathfrak{U}_r, Z_{0p})$ となり $q = 1$ のときは証明された。

b) $q > 1$ のとき

すべての $q' < q$ とすべての p に対して証明されたとする。

$c \in C^q(\mathfrak{U}_r, Z_{0p})$, $\delta c = 0$ とする。

$c'_{i_0 \cdots i_{q-1}} = \sum_i \varphi_i^r c_{i i_0 \cdots i_{q-1}}$ と定義すると

$c' \in C^{q-1}(\mathfrak{U}_r, D_{0p})$, $\delta c' = c$, $|c'| \leqq |c|$

となる。 $c^2 = \partial c'$ とおくと $c^2 \in C^{q-1}(\mathfrak{U}_r, Z_{0,p+1})$

$\delta c^2 = 0$, $|c^2| \leqq N_r|c|$ となる。

帰納法の仮定より

$b' \in C^{q-2}(\mathfrak{U}_{r+q-2}, Z_{0,p+1})$ が存在して，$\delta b' = \tau_{r+1, r+q-2}\, c^2$

$|b'| \leqq M_{r,q-1}|c^2| \leqq M_{r,q-1} N_r |c|$ となる。

任意の $(i_0,\cdots,i_{g-2}) \in I^{g-1}_{r+g-1}$ に対して

$\overline{K^{r+g-1}_{i_\nu}} \subset K^{r+g-2}_{\tau_{r+g-1} i_\nu} = K^{r+g-2}_{j_\nu}$ となる。

$K^{r+g-2}_{j_0\cdots j_{g-2}}$ 上で $b_{j_0\cdots j_{g-2}}$ は定義される。補助定理19より $K^{r+g-1}_{i_0\cdots i_{g-2}}$ 上の $C^\infty(0,p)$ 形式 $b^2_{i_0\cdots i_{g-2}}$ が存在して $\bar\partial b^2_{i_0\cdots i_{g-2}} = b^1_{j_0\cdots j_{g-2}}\big|K^{r+g-1}_{i_0\cdots i_{g-2}}$

$|b^2_{i_0\cdots i_{g-2}}|_{K^{r+g-1}_{i_0\cdots i_{g-2}}} \leqq L|b^1_{j_0\cdots j_{g-2}}|_{K^{r+g-2}_{j_0\cdots j_{g-2}}}$

を満たす。

$b^2 \in C^{g-2}(\mathfrak{U}_{r+g-1}, \mathcal{D}_{0p})$, $\bar\partial b^2 = \tau_{r+g-1} b^1$, $|b^2| \leqq L M_{r,g-1} N_r |c|$

となる。 $b = \tau_{r+1,r+g-1} c' - \delta b^2$ とおくと,

$b \in C^{g-1}(\mathfrak{U}_{r+g-1}, \mathcal{D}_{0p})$, $|b| \leqq |c|\,(1+gLM_{r,g-1}N_r)$

$\delta b = \tau_{r+1,r+g-1} c$, $\bar\partial b = 0$

となる。故に $b \in C^{g-1}(\mathfrak{U}_{r+g-1}, \mathcal{Z}_{0p})$ となり定理は証明された。

定理9 $\mathfrak{H}$ を $\overline{G}$ 上の有界正則函数の芽の層とする。

すると $g \geqq 1$ に対して $H^g(\overline{G}, \mathfrak{H}) = 0$ となる。

証明 $g \geqq 1$, $\xi \in H^g(\overline{G}, \mathfrak{H})$ とする。 $\overline{G}$ の開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在して ξ はコサイクル $c \in C^g(\mathfrak{U}, \mathfrak{H})$ で定義される。

十分細かい許容的被覆 $\mathfrak{U}_r$ を取って $c \in C^g(\mathfrak{U}_r, \mathcal{O})$, $|c| < \infty$ としてよい。補助定理20より $\tau_{r+1,r+g-1} c = \delta b$

$b \in C^{g-1}(\mathfrak{U}_{r+g-1}, \mathcal{O})$ $|b| < \infty$ となるものが存在する。

故に $b \in C^{g-1}(\mathfrak{U}_{r+g-1}, \mathfrak{H})$ となり $\xi = 0$ となる。

故に定理は証明された。

引用文献

1. Aĭzenberg L, A : Integral representations of holomorphic functions of several complex variables. Soviet Math. Doklady 5, 307–311 (1964)

2. Grauert, H ; Lieb · I ; Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen, Rice Univ. Studies.

3. Gunning R. C. ; Rossi, H : Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice Hall 1965.

4. Henkin G, M : Integral Representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications. Matem. Sb. 78 (120), 611–632 (1969).

5. Hörmander, L. An Introduction to complex analysis in several variables. Princeton van Nostrand 1966.

6. Koppelman, W ; The Cauchy integral for functions of several complex variables. Bull. Am. Math. Soc. 73, 373–377 (1967)

7. ———. The Cauchy integral for differential

forms. Bull. Am. Math. Soc. 73 554–556 (1967)
8. Leray. J: Le calcul différential et intégral sur une variété analytique complexe. (problème de Cauchy, III). Bull. Soc. math. France. 87, 1959, 81–180
9. Lieb. I.; Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten.
10. Ramirez de A. E.: Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis. Math. Ann. 184, 172–187 (1970).